

Rostock, den 27.04.2009

Projekt Filterentwurf WS 2008/09

Zur Lehrveranstaltung: Analoge und Digitale Filter

Bearbeiter: Maik Gotzmann
Studiengang: IT, 5. Semester
Matr.-Nr.: 6200338
Betreuer: Dr.-Ing. Thomas Buch

Inhaltsverzeichnis:

Aufgabenstellung	3
1. Aufgabe 1a:	
Symmetrischer Bandpass als analoge RLC-Schaltung.....	4
1.1. Dämpfungstoleranzschema und Normierung.....	4
1.2. Approximation des normierten TP-DTS.....	5
1.3. Entnormierung der Bauelemente.....	6
1.4. Simulation und Auswertung.....	7
2. Aufgabe 1b:	
Bandpass als diskretes IIR-Filter.....	10
2.1. Dämpfungstoleranzschema und Normierung.....	10
2.2. Approximation des normierten TP-DTS.....	11
2.3. Tiefpass-Bandpass Transformationen.....	12
2.4. Zerlegen der Gesamtübertragungsfunktion.....	13
2.5. Simulation und Auswertung.....	14
2.6. MatLab Quell-Code.....	16
3. Aufgabe 1c:	
Bandpass als diskretes FIR-Filter.....	18
3.1. Dämpfungstoleranzschema und Normierung.....	18
3.2. Fourier-Approximation.....	19
3.3. Kaiser-Fensterung.....	20
3.4. Koeffizientenliste.....	21
3.5. Simulation und Auswertung.....	22
3.6. MatLab Quell-Code.....	24
4. Aufgabe 2:	
Vierkreis HF-Bandfilter.....	26
4.1. p-n-Daten des normierten Tiefpasses.....	26
4.2. Verlusttransformation.....	26
4.3. Kettenbruchzerlegung.....	27
4.4. Berechnung der Baugrößen.....	28
4.5. Simulation und Auswertung.....	30
4.6. MatLab Quell-Code.....	32
Quellenverzeichnis	34

Aufgabenstellung:

1. Es ist ein symmetrischer Bandpass zu entwerfen mit folgenden Daten:
 - Untere Sperrfrequenz 2 kHz
 - untere Durchlassgrenze 3 kHz
 - obere Durchlassgrenze 4 kHz

Der Bandpass ist zu realisieren als:

- a) als analoge RLC-Schaltung mit Tschebyscheff-Approximation mit den Dämpfungswerten:
 - maximale Durchlassdämpfung 1,25 dB
 - minimale Sperrdämpfung 50 dB
 - b) als diskretes IIR-Filter mit den gleichen Werten in Kettenschaltung von Bausteinen 1. und 2. Ordnung. Die Skalierung der einzelnen Bausteine soll so erfolgen, dass der Koeffizient $b_0 = 1$ gesetzt wird. Die Abtastfrequenz ist geeignet festzulegen.
 - c) als diskretes FIR-Filter mit Fourier-Approximation und Kaiser-Fensterung.
-
2. Es ist ein vierkreisiges HF-Bandfilter mit kapazitiver Kopplung für eine Mittenfrequenz von 450 kHz und einer Bandbreite von 8 kHz zu entwerfen. Es ist eine Tschebyscheff-Approximation bei einer maximalen Durchlassdämpfung von 1,25 dB zu wählen. Die Bauelemente sind so zu dimensionieren, dass die Eingangs- und Ausgangswiderstände an übliche Transistorstufen angepasst werden können, wobei alle Spulen die gleichen BE-Daten (Güte, Induktivität) besitzen sollen.

In allen Fällen ist der Dämpfungsverlauf und der Gruppenlaufzeitverlauf darzustellen und nachzuweisen, dass die vorgegebenen Toleranzgrenzen eingehalten werden. Die RLC- und die Bandfilterschaltung sind mittels PSpice zu realisieren und Amplituden – und Gruppenlaufzeitgang zu ermitteln.

Rechenweg und Zwischenergebnisse sind anzugeben. Bei Verwendung von MATLAB sind ausschließlich Funktionen aus MATLAB (ohne Toolboxen) zu verwenden. Die MATLAB-Scripte sind beizulegen oder können per E-Mail zugestellt werden an: [thomas.buch\(at\)uni-rostock.de](mailto:thomas.buch(at)uni-rostock.de).

1. Aufgabe 1a:

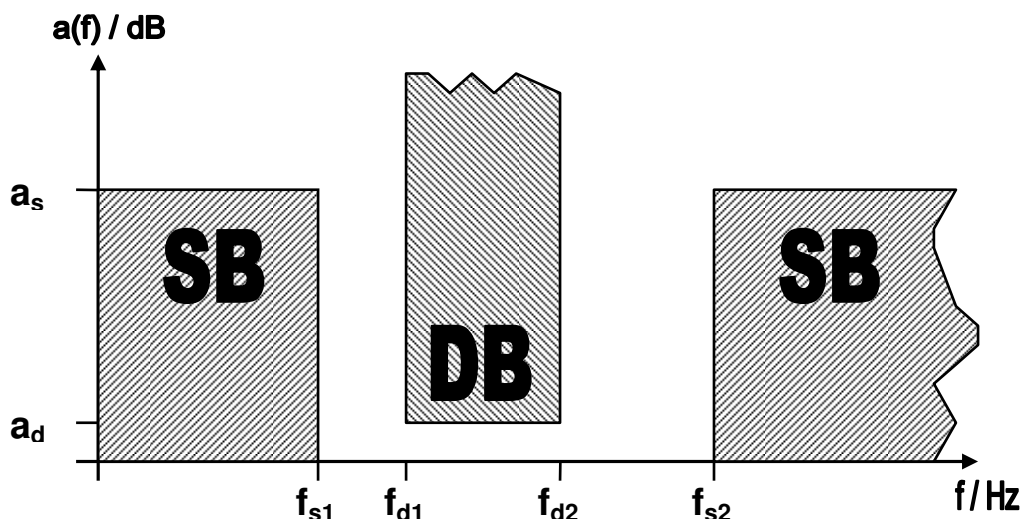
Entwurf eines symmetrischen Bandpasses als RLC-Schaltung

Entwurf als analoge RLC-Schaltung mit Tschebyscheff-Approximation, die folgende Bedingungen erfüllt:

- untere Sperrfrequenz: 2 KHz
- untere Durchlassgrenze: 3 KHz
- obere Durchlassgrenze: 4 KHz
- maximale Durchlassdämpfung: 1,25 dB
- minimale Sperrdämpfung: 50 dB

1.1. Dämpfungstoleranzschema und Normierung

Gem. den o.g. Werten ist folgendes Dämpfungstoleranzschema gegeben:

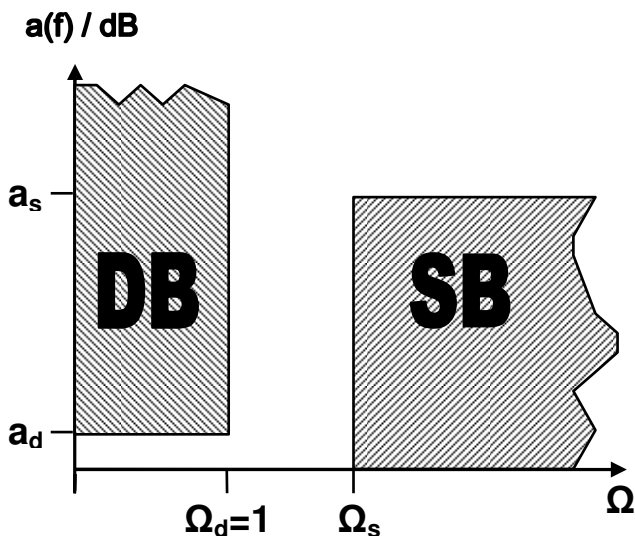


Dieses stellt auf einfache Art die Sperr- (SB) und Durchlassbereiche (DB) mit allen nötigen Eckdaten (Frequenzen und Dämpfungen) für das zu realisierende Filter dar. Was allerdings bei genauerer Betrachtung auffällt: f_{s2} ist nicht gegeben.

Aus der Bedingung für symmetrische Bandpässe $f_{s1} * f_{s2} = f_{d1} * f_{d2}$ folgt:

$$f_{s2} = \frac{f_{d1} * f_{d2}}{f_{s1}} = \frac{3 \text{ KHz} * 4 \text{ KHz}}{2 \text{ KHz}} = \underline{\underline{6 \text{ KHz}}}$$

Anschließend erfolgt die Umwandlung des Bandpass-DTS in ein normiertes Tiefpass-DTS. Durch die Normierung aller Eckfrequenzen, wobei f_d auf Ω_d mit der normierten einheitslosen Frequenz 1 abgebildet wird, lässt sich ein einheitliches Entwurfsverfahren anwenden, dass für alle analogen Filtertypen (TP,HP,BP) anwendbar ist.



Zur Berechnung der allg. normierten Frequenz Ω gilt:

$$\Omega = \frac{f^2 - f_{d1} * f_{d2}}{f * (f_{d2} - f_{d1})}$$

Damit ergibt sich für die normierte Sperrfrequenz:

$$\Omega_s = \frac{f_{s2}^2 - f_{d1} * f_{d2}}{f_{s2} * (f_{d2} - f_{d1})} = \frac{36 \text{ KHz} - 12 \text{ KHz}}{6 \text{ KHz} * 1 \text{ KHz}} = 4$$

Abb.: DTS des normierten Tiefpasses

1.2. Approximation des normierten TP-DTS

Ziel der nun folgenden Approximation ist es, Parameter für die geeigneten Dämpfungskurven $a(\Omega)$ zu finden. Dabei ist darauf zu achten, dass der Dämpfungsverlauf auch durch eine Schaltung realisierbar ist.

Bei der Standard-Approximation nach Tschebyscheff haben wir die Wahl zwischen zwei Filtertypen:

- Typ 1: erzeugt eine Welligkeit im Durchlassbereich
- Typ 2: erzeugt eine Welligkeit im Sperrbereich

Die Entscheidung fällt auf Typ 1 !

Folgende Dämpfungsfunktion für die Tschebyscheff-Approximation T1 im Durchlassbereich ist dabei gegeben:

$$a(\Omega) = 10 * \lg(1 + \delta^2 * T_n(\Omega)^2)$$

δ – Parameter
 T_n – Tschebyscheff Polynome

Bestimmung des Parameters δ :

$$\delta = \sqrt{10^{0,1 * a_d} - 1} = \sqrt{10^{0,1 * 0,25 \text{ dB}} - 1} = \underline{\underline{0,57751314}}$$

Abschätzen der Ordnung des zu entwerfenden Filters:

Für $\Omega = \Omega_s$:

$$n \geq \frac{\text{ar cosh}(\sqrt{10^{0,1 * a_s} - 1} / \delta)}{\text{ar cosh}(\Omega_s)}$$

$$n \geq \frac{\text{ar cosh}(\sqrt{10^{0,1 * 50 \text{ dB}} - 1} / \delta)}{\text{ar cosh}(4)}$$

$$\underline{\underline{n \geq 3,391}}$$

Die Ordnung n gibt dabei die Anzahl der zu verwenden normierten Bauelemente (L,C) an und ist folglich ganzzahlig zu wählen. Somit wird sie mit **n=4** aufgerundet.

Bestimmung des Reflexionsfaktors ρ : $\rho = \sqrt{1 - 10^{-0,1 * a_d}} = 0,5001$
 $\rho = 50\%$

Mit den bestimmten Parametern kann nun der entsprechende Tschebyscheff-T1-Filter aus dem Filterkatalog (R. Saal's „Handbuch zum Filterentwurf“) bestimmt werden. Die charakteristischen Größen der normierten Bauelemente können dadurch direkt abgelesen werden (zu finden unter Filtertyp: C 0450 b, Zeile T).

Abgelesene Werte:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 3 \\ l_1 &= 2,283178 \\ c_2 &= 1,011485 \\ l_3 &= 3,034456 \\ c_4 &= 0,761059 \end{aligned}$$

1.3. Entnormierung der Bauelemente

Da es sich bei den abgelesenen Bauelementen um Normierte handelt, müssen diese nun im Folgenden in Reale zurück transformiert werden. Dazu ist es nötig einen, Bezugswiderstand R_B zu bestimmen und die Bezugskreisfrequenz zu berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{R_B} &= 1 K\Omega & \omega_{d1} &= 2 * \pi * f_{d1} = 18849,55592 \frac{1}{s} \\ & & \omega_{d2} &= 2 * \pi * f_{d2} = 25132,74123 \frac{1}{s} \\ & & \underline{\omega_B} &= \omega_{d2} - \omega_{d1} = 6283,18531 \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Die normierten Induktivitäten werden nun zu seriellen Schwingkreisen und die normierten Kapazitäten zu parallelen Schwingkreisen entnormiert.

Serienschwingkreise:

$$L = l * \frac{R_B}{\omega_B} \quad C = \frac{\omega_B}{l * \omega_{d1} * \omega_{d2} * R_B}$$

$$\begin{aligned} \underline{L_1} &= 0,3633790645 \text{ H} & \underline{C_1} &= 5,809 * 10^{-9} \text{ F} \\ \underline{L_3} &= 0,4829486718 \text{ H} & \underline{C_3} &= 4,3708 * 10^{-9} \text{ F} \end{aligned}$$

Parallelschwingkreise:

$$L = \frac{\omega_B * R_B}{c * \omega_{d1} * \omega_{d2}} \quad C = \frac{c}{\omega_B * R_B}$$

$$\begin{aligned} \underline{L_2} &= 0,0131123 \text{ H} & \underline{C_2} &= 1,609828 * 10^{-7} \text{ F} \\ \underline{L_4} &= 0,0174269 \text{ H} & \underline{C_4} &= 1,211263 * 10^{-7} \text{ F} \end{aligned}$$

Entnormierung der Widerstände:

$$R = r * R_B \quad \underline{R_1} = 1 K\Omega \quad \underline{R_2} = 3 K\Omega$$

1.4. Simulation und Auswertung

Zum Aufbau der virtuellen Schaltung und Simulation wurde National Instruments Multisim 10.0 verwendet. Dieses basiert, wie viele andere auch, auf PSpice.

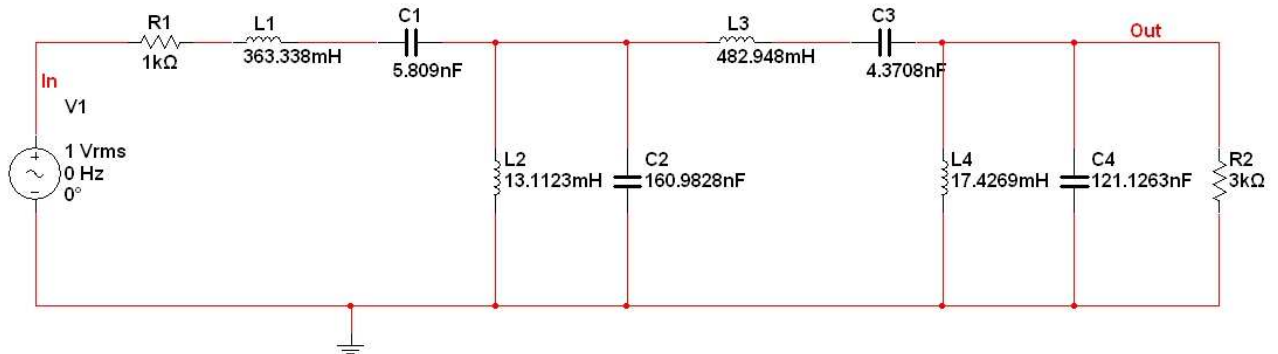


Abb.: Schaltplan des entworfenen Filters

Die Wechselspannungsquelle symbolisiert dabei den Eingang des Filters und ist lediglich zu Simulationszwecken dort postiert. Der Filterausgang wird an der mit „Out“ beschrifteten Leitung abgegriffen.

Mittels der AC Analyse erhält man dann das Bode-Diagramm: den Verlauf der Amplitude über die Frequenz sowie den Phasengang.

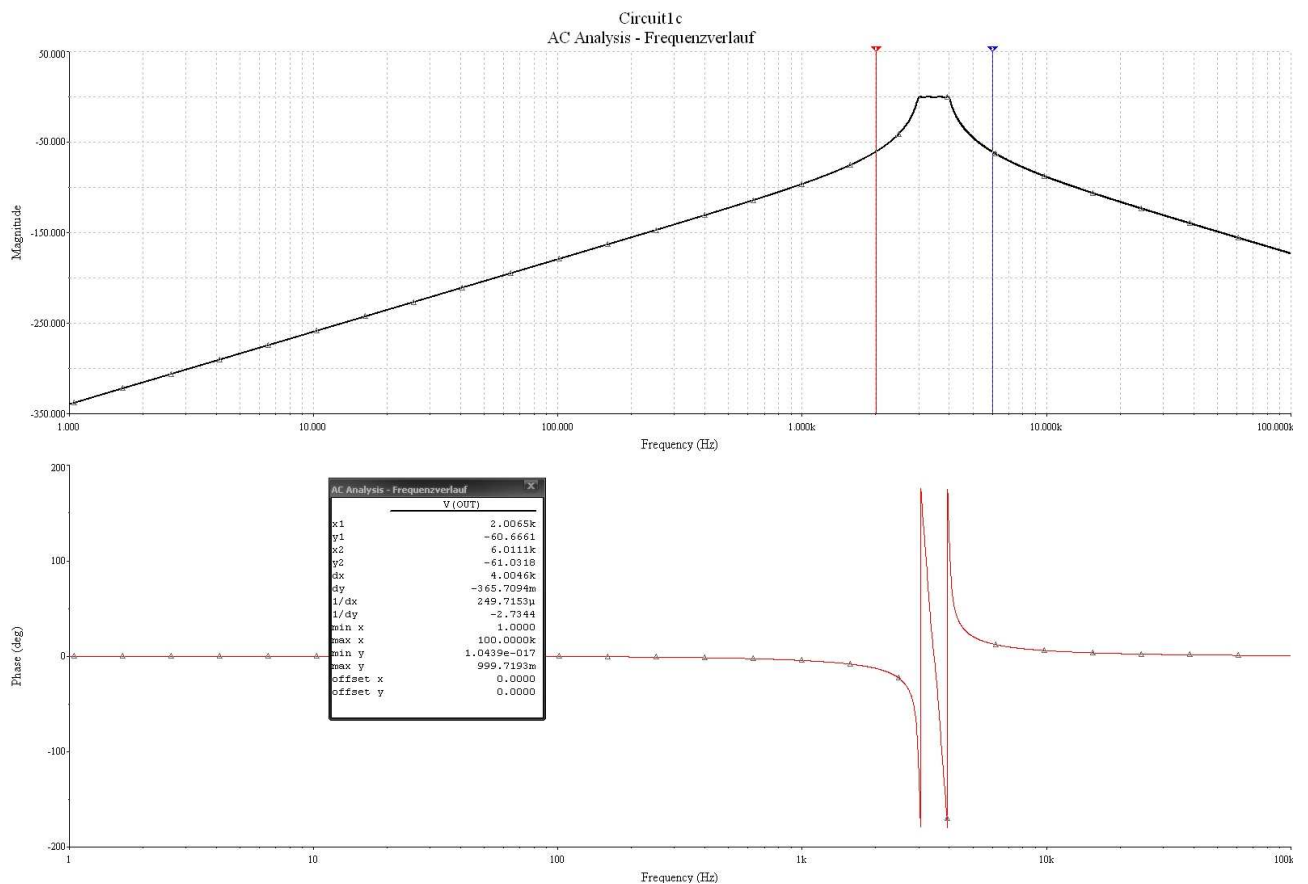


Abb.: Bode-Diagramm nach erfolgter Simulation

Durch das Setzen der beiden Marker auf die Sperrfrequenzen 2 KHz und 6 KHz kann man auch sehr schön die minimale Sperrdämpfung ablesen: sie liegt jeweils bei gut 61dB. Damit wäre bereits eine Bedingung für das zu entwerfende Filter erfüllt (sogar übererfüllt, da ja nur 50dB verlangt wurden).

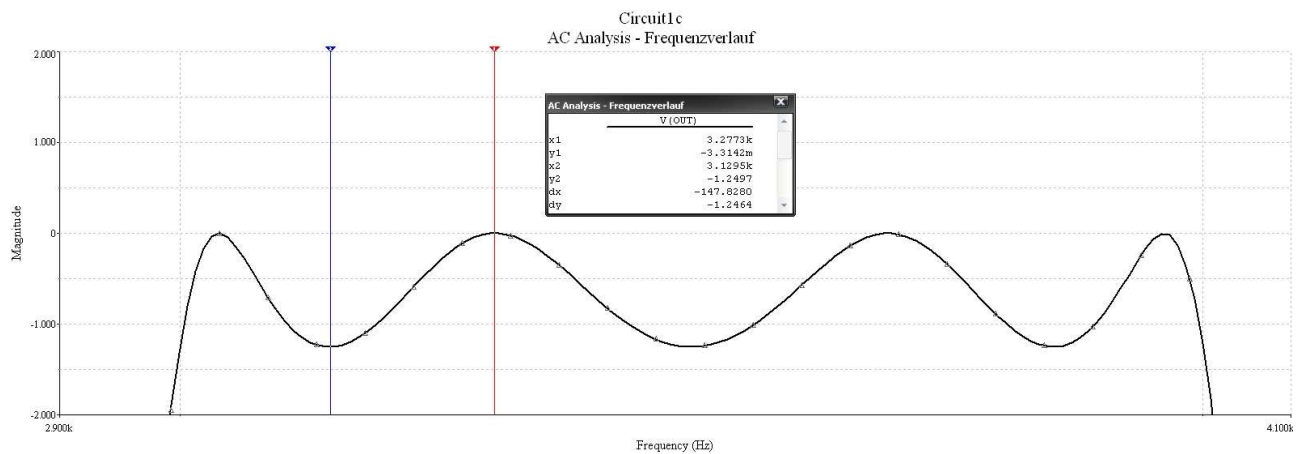


Abb.: Detailansicht des Amplitudenverlaufes im Durchlassbereich

Im Durchlassbereich ist auch die starke Welligkeit zu erkennen, die so typisch ist für den Tschebyscheff Filter Typ 1. Die vier Maxima stehen dabei für die Ordnung des Filters. Mit Hilfe der Marker lassen sich auch hier sehr genau die Pegelwerte ablesen, die uns mit einem $dy=1.246$ dB bzw. $y2=-1.2497$ dB bescheinigen, dass die Bedingung der maximal zulässigen Durchlassdämpfung von 1.25 dB noch geradeso eingehalten wurde. Der Durchlassbereich ist ebenso klar und deutlich eingegrenzt, wie gefordert: er reicht von 3 KHz bis 4 KHz.

Das Darstellen der Gruppenlaufzeit gestaltete sich mit Multisim dagegen schon ein wenig komplizierter, da dafür kein Menü-Punkt im Funktionsumfang vorgesehen ist. Und die Verwendung des mitgelieferten PSpice Makros `grpdelay()` ist auch nicht möglich, da es von Seiten des Herstellers fehlerhaft implementiert wurde. Eben von dieser Seite wird deshalb die Verwendung des Befehls `-deriv(ph(V(out)))/(2*pi)` empfohlen, dieser erzeugt dann unter Verwendung des Post Processors die Ausgabe der Gruppenlaufzeiten.

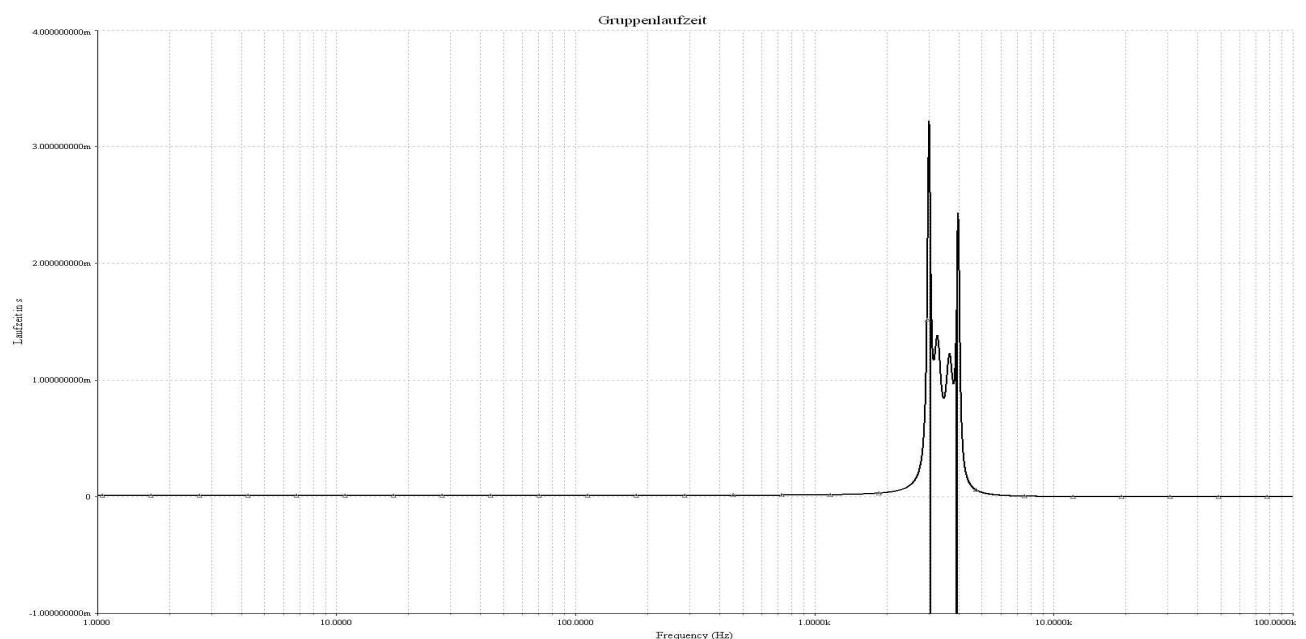


Abb.: Gruppenlaufzeit über den gesamten Frequenzgang von 1Hz-100KHz

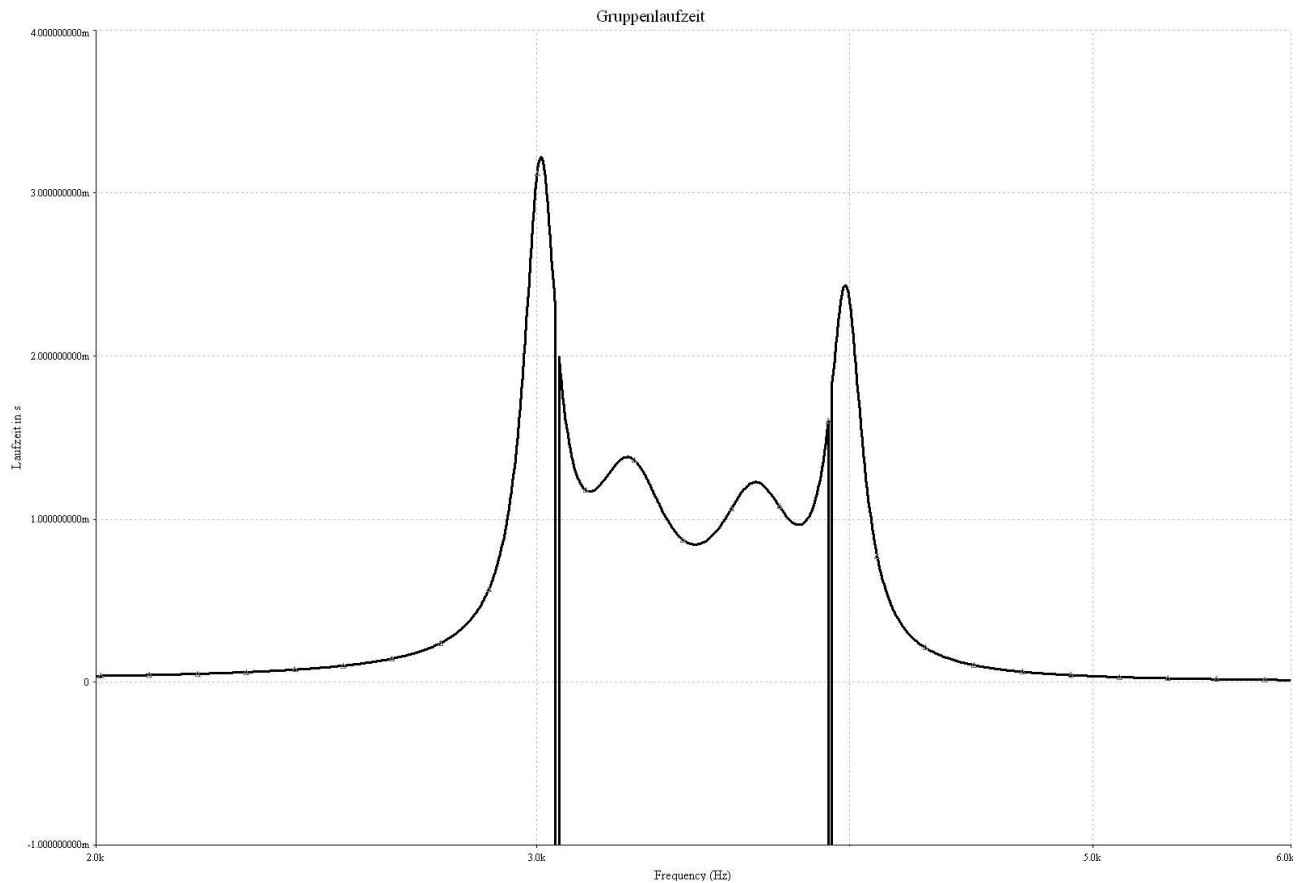


Abb.: Detailansicht der Gruppenlaufzeiten im Bereich zwischen den beiden Sperrfrequenzen

Im Durchlassbereich kommt es zu Verzögerungen der Signale (besonders bei Frequenzen an den Grenzen des Durchlassbereiches), was zu Verzerrungen des Ausgangssignals führt. Die zwei Ausrutscher hinein in die negative Signallaufzeit muss man wohl auch hier wieder auf einen Programmfehler zurückführen.

2. Aufgabe 1b:

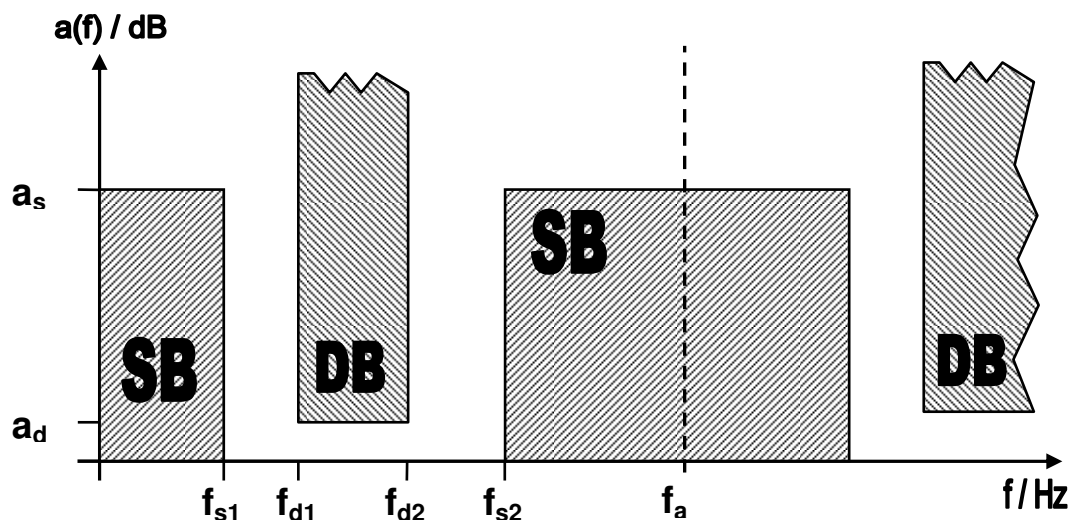
Entwurf eines diskreten IIR-Filters

Der zu entwerfende diskrete Filter soll folgende Bedingungen erfüllen:

- untere Sperrfrequenz: 2 KHz
- untere Durchlassgrenze: 3 KHz
- obere Durchlassgrenze: 4 KHz
- maximale Durchlassdämpfung: 1,25 dB
- minimale Sperrdämpfung: 50 dB

Die Realisierung des Filters soll als Kettenschaltung mit Bausteinen 1. und 2. Ordnung erfolgen, wobei der Koeffizient $b_0=1$ zu setzen ist.

2.1. Dämpfungstoleranzschema und Normierung



Da durch die Abtastung des Eingangssignals das Spektrum periodisch wiederholt wird, ist es erforderlich das Eingangssignal mittels eines Tiefpasses zu selektieren.

Die Grenzfrequenz für diesen Anti-Aliasing-Filter ist dabei so zu wählen, dass keine Aliasing-Effekte durch das benachbarte Spektrum auftreten können, allerdings ist es auch unerheblich, wenn sie sich nur ein wenig überlappen, da es sich dort um den Sperrbereich handelt.

Die Grenzfrequenz wird somit mit $f_g=14$ KHz festgelegt.

Die Festlegung der Abtastfrequenz erfolgt nach:

$$f_a \geq f_{s2} + f_g \geq 6 \text{ KHz} + 14 \text{ KHz}$$

Die Abtastfrequenz wird daher mit $f_a=20$ KHz festgelegt.

Nun erfolgt die Umwandlung des Bandpasses in einen normierten Tiefpass.

$$\text{Allg. gilt: } \Omega = \tan\left(\pi * \frac{f}{f_a}\right)$$

$$\Omega_{d1} = \tan\left(\pi * \frac{f_{d1}}{f_a}\right) = \tan\left(\pi * \frac{3\text{KHz}}{20\text{KHz}}\right) = \underline{\underline{0,50952545}}$$

$$\Omega_{d2} = \tan\left(\pi * \frac{f_{d2}}{f_a}\right) = \tan\left(\pi * \frac{4\text{KHz}}{20\text{KHz}}\right) = \underline{\underline{0,72654253}}$$

$$\Omega_{s1} = \tan\left(\pi * \frac{f_{s1}}{f_a}\right) = \tan\left(\pi * \frac{2\text{KHz}}{20\text{KHz}}\right) = \underline{\underline{0,32491969}}$$

Ω_{s2} folgt aus der Bedingung für symmetrische Bandpässe:

$$\Omega_{s1} * \Omega_{s2} = \Omega_{d1} * \Omega_{d2}$$

$$\Omega_{s2} = \frac{\Omega_{d1} * \Omega_{d2}}{\Omega_{s1}} = \underline{\underline{1,13933357}}$$

Normierte Mittenfrequenz:

$$\Omega_m = \sqrt{\Omega_{d1} * \Omega_{d2}}$$

Sperrfrequenz des normierten Tiefpasses:

$$\Omega'_s = \frac{\Omega_{s2}^2 - \Omega_{d1} * \Omega_{d2}}{\Omega_{s2} * (\Omega_{d2} - \Omega_{d1})} = \underline{\underline{3,75276398}}$$

2.2. Approximation des normierten TP-DTS

Auch hier erfolgt die Approximation analog zu Aufgabe 1a nach Tschebyscheff, Filtertyp 1.

Parameter aus Aufgabe 1a: $\delta = \underline{\underline{0,57751314}}$

Ordnung des Filters:

$$n \geq \frac{\text{ar cosh}(\sqrt{10^{0,1 * as} - 1} / \delta)}{\text{ar cosh}(\Omega'_s)} \geq \underline{\underline{3,504}}$$

$$\underline{\underline{n = 4}}$$

Reflexionsfaktor aus Aufgabe 1a:

$$\underline{\underline{\rho = 50\%}}$$

Damit sind nun alle Parameter zur Hand, um aus dem Filterkatalog den richtigen Filter zu bestimmen und die Polstellen des normierten Tiefpasses direkt abzulesen.

Der Filtertyp ist derselbe, der auch schon in Aufgabe 1a Verwendung fand (C0450b).

Die Polstellen setzen sich aus den Werten in Spalte $-\alpha_v$ (Realteil) und $\pm\beta_v$ (imaginärteil der Polstelle) zusammen:

$$\underline{\underline{p_{1,2} = -0,3097028794 \pm 0,4036126504 i}}$$

$$\underline{\underline{p_{3,4} = -0,1282831330 \pm 0,9744071346 i}}$$

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, dass sich die Polstellen auch rechnerisch bestimmen lassen.

2.3. Tiefpass-Bandpass Transformationen

Damit ergibt sich bereits die Übertragungsfunktion des Tiefpasses im p-Bereich:

$$H_{TP}(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)}$$

Um daraus nun wieder zum Bandpass zu gelangen, muss die Variable p wie folgt ersetzt werden:

$$p \rightarrow \frac{1}{\Delta_{BP}} * \left(\frac{\Omega_m}{p} + \frac{p}{\Omega_m} \right) \quad \Delta_{BP} = \frac{\Omega_{d2} - \Omega_{d1}}{\Omega_m}$$

$$H_{BP}(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{\Delta_{BP}} * \left(\frac{\Omega_m}{p} + \frac{p}{\Omega_m} \right) - p_k \right]}$$

$$H_{BP}(p) = \Delta_{BP}^n * \Omega_m^n * \frac{p^n}{\prod_{k=1}^n [p^2 - \Delta_{BP} * \Omega_m * p_k * p + \Omega_m^2]}$$

Damit lassen sich nun alle Kenngrößen berechnen. Und da die Berechnungen ab jetzt sehr umfangreich ausfallen und weil es sich wohl auf Dauer eh nicht vermeiden lässt, erfolgen alle folgenden Berechnungen mittels MatLab.

Die Berechnung der Polstellen erfolgt durch Lösen der quadratischen Gleichung des Nenners. Dabei werden aus einer Polstelle des Tiefpasses zwei Polstellen des Bandpasses:

$$p_{1,2} = -0.011536008300473 \pm 0.511668682291167i$$

$$p_{3,4} = -0.031189062640291 \pm 0.565291161164512i$$

$$p_{5,6} = -0.036021751205355 \pm 0.652881999080960i$$

$$p_{7,8} = -0.016303622342623 \pm 0.723131671141475i$$

Die Nullstellen lassen sich direkt ablesen: $n_{1,2,3,4} = 0$ (4-fache im Ursprung)

Der Verstärkungsfaktor K_{BP} steht direkt vor dem Bruch:

$$K_{BP} = \Delta_{BP}^4 * \Omega_m^4 = \underline{\underline{0.002218072024934}}$$

Als nächstes muss nun die neu erstellte Übertragungsfunktion von dem p-Bereich in die z-Ebene transformiert werden. Die geschieht mit der Bilineartransformation:

$$p \rightarrow \frac{z-1}{z+1}$$

$$H_{BP}(p) = K_{BP} \frac{\prod_{l=1}^m (p - p_{nl})}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)} \rightarrow H_{BP}(z) = K_{BP} \frac{\prod_{l=1}^m \left(\frac{z-1}{z+1} - p_l \right)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{z-1}{z+1} - p_k \right)}$$

Damit ergeben sich folgende acht Polstellen im z-Bereich:

$$\begin{aligned}
 p_{1,2} &= 0.381734506332268 \pm 0.870743867726520i \\
 p_{3,4} &= 0.491337550595356 \pm 0.817541580111159i \\
 p_{5,6} &= 0.306477109465843 \pm 0.929599142132760i \\
 p_{7,8} &= 0.574362936111008 \pm 0.796365331889091i
 \end{aligned}$$

Die vier Nullstellen wandern durch die Transformation in den z-Bereich auf der reellen Achse auf die 1, vier Weitere entstehen an der Position -1.

$$\begin{aligned}
 n_{1,2,3,4} &= 1 \\
 n_{5,6,7,8} &= -1
 \end{aligned}$$

Der Verstärkungsfaktor beträgt nun: $K=0.000535$

2.4. Zerlegen der Gesamtübertragungsfunktion

Im letzten Schritt wird nun die Gesamtübertragungsfunktion $G(z)$ in Teilübertragungsfunktionen 1. und 2. Ordnung zerlegt, um sie dann als Kettenschaltung mit Elementen niedriger Ordnung realisieren zu können. Da die Ordnung des Filters mit $n=8$ geradzahlig ist, existieren nur Glieder 2. Ordnung:

$$G(z) = G_1(z) * G_2(z) * G_3(z) * G_4(z)$$

Es entstehen also 4 Teilübertragungsfunktionen, die sich jeweils aus zwei beliebigen Nullstellen und dem komplementär komplexen Polpaar zusammensetzen:

$G_1(z)$: Nullstellen: $n_{1,2} = 1$
 Polstellen: $p_{1,2} = 0.381734506332268 \pm 0.870743867726520i$

$$\underline{\underline{G_1(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.7635z + 0.9039}}}$$

$G_2(z)$: Nullstellen: $n_{3,4} = 1$
 Polstellen: $p_{3,4} = 0.491337550595356 \pm 0.817541580111159i$

$$\underline{\underline{G_2(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.9827z + 0.9098}}}$$

$G_3(z)$: Nullstellen: $n_{5,6} = -1$
 Polstellen: $p_{5,6} = 0.306477109465843 \pm 0.929599142132760i$

$$\underline{\underline{G_3(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 0.613z + 0.9581}}}$$

$G_4(z)$: Nullstellen: $n_{7,8} = -1$
 Polstellen: $p_{7,8} = 0.574362936111008 \pm 0.796365331889091i$

$$\underline{\underline{G_4(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1.149z + 0.9641}}}$$

2.5. Simulation und Auswertung

Wie bereits erwähnt, erfolgte ein Grossteil der Berechnungen mit MatLab. So ist es nicht verwunderlich, dass auch Dämpfungsverlauf, Gruppenlaufzeit und p-n-Plan damit erstellt wurden. Und das kam dabei raus:

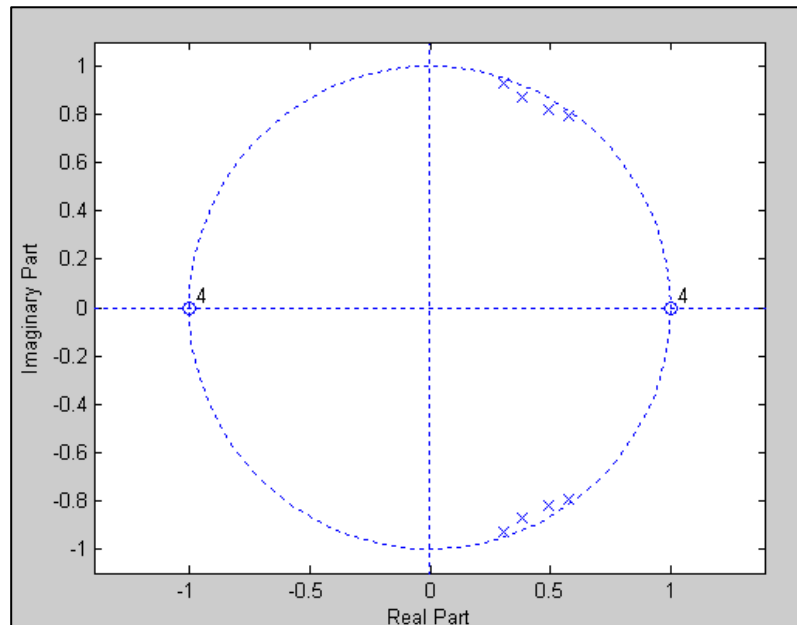


Abb.: p-n-Plan der Gesamtübertragungsfunktion $G(z)$

Erste erfreuliche Erkenntnis, die dem p-n-Plan entnommen werden kann: alle Polstellen liegen innerhalb des Einheitskreises, womit der Filter wohl stabil sein dürfte. Weiterhin ist zu sehen, dass sie sich in der Nähe des Randes des Einheitskreises postieren, was darauf schließen lässt, dass der entworfene Filter tatsächlich ein Bandpass ist.

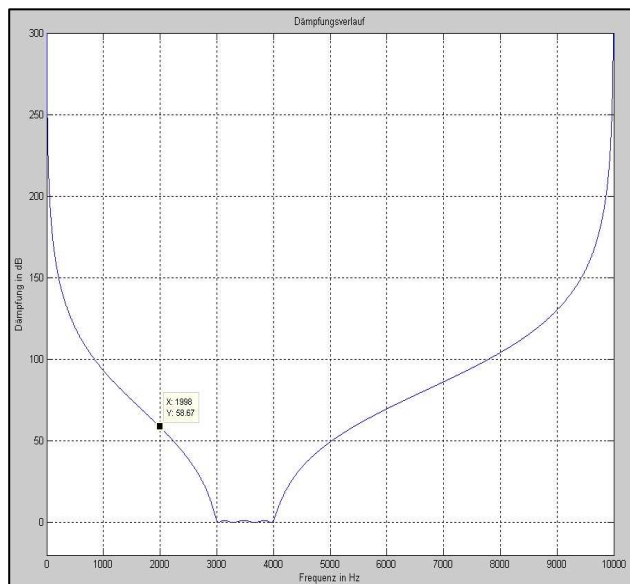


Abb.: Dämpfungsverlauf zwischen 0-10 KHz

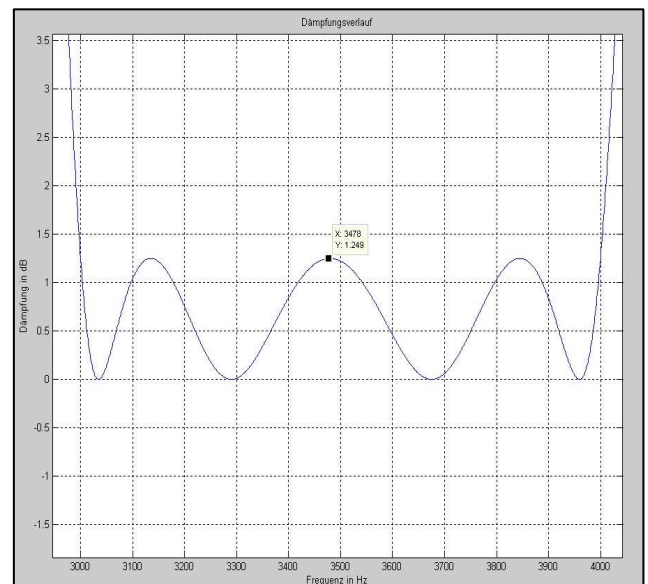


Abb.: Detailansicht im Durchlassbereich

Anhand des Dämpfungsverlaufes ist zu erkennen, dass die Dämpfung an den Sperrfrequenzen (min. Sperrdämpfung) über 50 dB beträgt. Die maximale Durchlassdämpfung im Durchlassbereich beträgt 1,249 dB. Damit sind alle Bedingungen für das zu entwerfende Filter erfüllt worden, wenn auch nur mit wenig Spielraum.

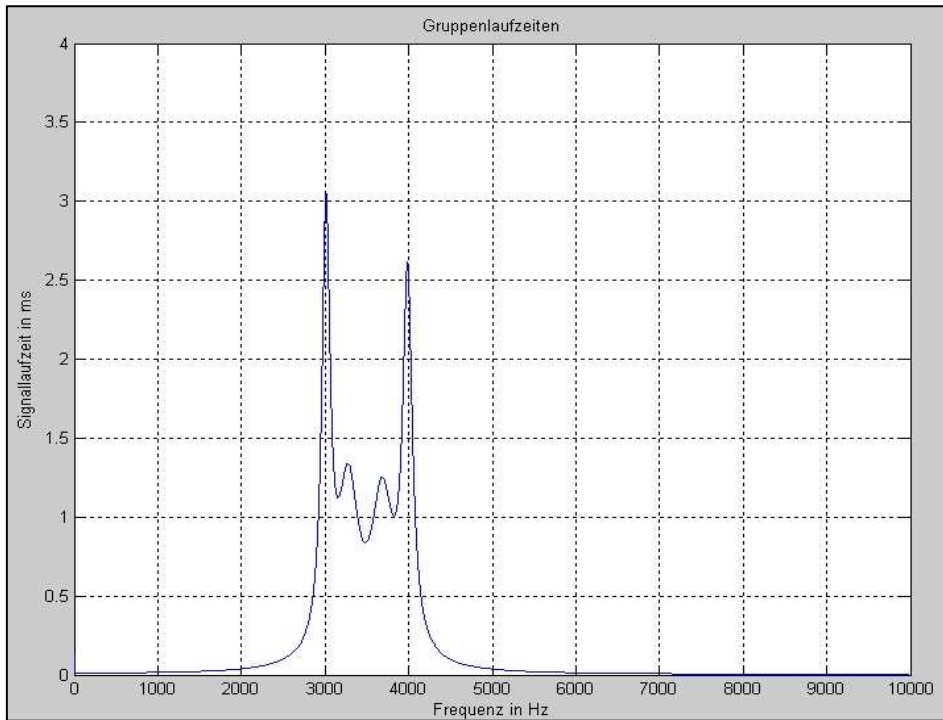


Abb.: Gruppenlaufzeit zwischen 0-10 KHz

Wie bereits der analoge Bandpass aus Aufgabe 1a, weist auch dieser diskrete, rekursive Filter Unregelmäßigkeiten bei der Laufzeit der Signale im Durchlassbereich auf. Auch hier kommt es zu Verzerrungen des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal.

2.6. MatLab Quell-Code

```
format long; % erhöht die Genauigkeit bei Ausgabe von Werten
omegam = 0.60843398; % normierte Mittenfrequenz des Bandpasses
deltabp= 0.35668139;
ta=1/20000; % Abtastintervall
fa=20000; % Abtastfrequenz

% Für den normierten Tiefpass wurden aus dem Saal die folgenden 4
% Polstellen abgelesen:

p1=-0.3097028794+0.4036126504i;
p2=-0.3097028794-0.4036126504i;
p3=-0.1282831330+0.9744071346i;
p4=-0.1282831330-0.9744071346i;

% Überführen der Polstellen für den Norm. TP -> normierter BP

pb1=(omegam*deltabp*p1)/2+sqrt((omegam*deltabp*p1)^2/4-omegam^2);
pb2=(omegam*deltabp*p1)/2-sqrt((omegam*deltabp*p1)^2/4-omegam^2);
pb3=(omegam*deltabp*p2)/2+sqrt((omegam*deltabp*p2)^2/4-omegam^2);
pb4=(omegam*deltabp*p2)/2-sqrt((omegam*deltabp*p2)^2/4-omegam^2);
pb5=(omegam*deltabp*p3)/2+sqrt((omegam*deltabp*p3)^2/4-omegam^2);
pb6=(omegam*deltabp*p3)/2-sqrt((omegam*deltabp*p3)^2/4-omegam^2);
pb7=(omegam*deltabp*p4)/2+sqrt((omegam*deltabp*p4)^2/4-omegam^2);
pb8=(omegam*deltabp*p4)/2-sqrt((omegam*deltabp*p4)^2/4-omegam^2);

ktp=omegam^4*deltabp^4 % Verstärkungsfaktor

% Bandpass-Übertragungsfkt

bps= zpk([0 0 0 0],[pb1 pb2 pb3 pb4 pb5 pb6 pb7 pb8],ktp); bpzeros=zero(bps);
bppole=pole(bps);

% Überführung der BP-Übertragungsfunktion von p-Ebene in z-Ebene mittels
% der Bilineartransformation, Neuberechnen des Verstärkungsfaktors

zzero = (ones(size(bpzeros))+bpzeros)./(ones(size(bpzeros))-bpzeros);
zpole= (ones(size(bppole))+bppole)./(ones(size(bppole))-bppole);
zk= ktp * prod((1-bpzeros))/prod((1-bppole));
zk=abs(zk);

% Auffüllen der noch fehlenden 4 Nullstellen mit (-1)

for i =(5):8
    zzero(i,1)=-1;
end;

sysz=zpk(zzero,zpole,zk,ta) % Übertragungsfkt im z-Bereich erstellen
figure(1), zplane(zero(sysz),pole(sysz)); % Ausgabe p-n-Plan im z-Bereich

% Ausgabe des Dämpfungsverlaufes des IIR-Filters

[b, a] = zp2tf(zzero, zpole, zk);
[H,F] = freqz(b, a, 10000, fa);
figure(2), plot(F, 20*log10(H./max(H))*(-1)), grid;
axis([0, 10000, -20, 300]);
ylabel('Dämpfung in dB'), xlabel('Frequenz in Hz'), title('Dämpfungsverlauf');
```



```

% Ausgabe des Gruppenlaufzeit des IIR-Filters

[b, a] = zp2tf(zzero, zpole, zk);
[H,F] = grpdelay(b, a, 10000, fa);
figure(3), plot(F, H*ta*1000), grid;
axis([0, 10000, 0, 4]);
ylabel('Signallaufzeit in ms'), xlabel('Frequenz in Hz'),
title('Gruppenlaufzeiten');

% Erzeugen von Teilübertragungsfunktionen der Ordnung 2

zpole=sort(zpole); % Sortieren zur komplementären Zusammengehörigkeit
i=1;
z0=zpk([zzero(i) ,zzero(i+1)], [zpole(i) ,zpole(i+1)], 1,ta)
i=i+2;
z1=zpk([zzero(i) ,zzero(i+1)], [zpole(i) ,zpole(i+1)], 1,ta)
i=i+2;
z2=zpk([zzero(i) ,zzero(i+1)], [zpole(i) ,zpole(i+1)], 1,ta)
i=i+2;
z3=zpk([zzero(i) ,zzero(i+1)], [zpole(i) ,zpole(i+1)], 1,ta)

```

3. Aufgabe 1c:

Entwurf eines diskreten FIR-Filters

Der zu entwerfende diskrete Filter soll folgende Bedingungen erfüllen:

- untere Sperrfrequenz: 2 KHz
- untere Durchlassgrenze: 3 KHz
- obere Durchlassgrenze: 4 KHz
- maximale Durchlassdämpfung: 1,25 dB
- minimale Sperrdämpfung: 50 dB

Die Abtastfrequenz wird beibehalten: $f_a=20$ KHz

Die Realisierung des Filters soll mittels der Fourier-Approximation und Kaiser-Fensterung erfolgen.

3.1. Dämpfungstoleranzschema und Normierung

Ausgangspunkt ist wiederum das Dämpfungstoleranzschema eines diskreten Bandpasses, wie es bereits unter 2.1. erläutert wurde. Mit einer Änderung:

$$f_{s2}=5 \text{ KHz}$$

Um den einheitlichen Entwurf des Filters anwenden zu können, ist auch hier wieder eine Transformation des Bandpasses in einen normierten Tiefpass notwendig.

Für die Bandpass-Transformation stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

1. Kettenschaltung von Tief- und Hochpass, $G_{BP}=G_{TP} \cdot G_{HP}$
2. Parallelschaltung von zwei Tiefpässen, $G_{BP}=G_{TP1} \cdot G_{TP2}$

Die Entscheidung fällt auf die zweite Möglichkeit.

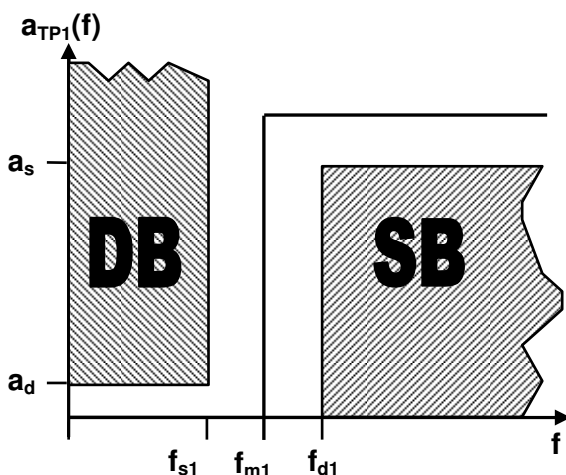


Abb: DTS des ersten TP's

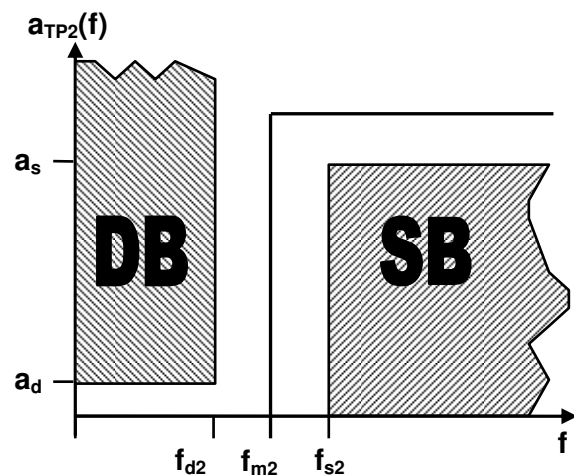


Abb: DTS des zweiten TP's

Die Übertragungsfunktion des Bandpasses $G_{BP}(\omega')$ erhält man aus der Approximation des Dämpfungsverlaufes bei f_m der beiden idealen Tiefpässe.

$$f_{m1} = \frac{f_{s1} + f_{d1}}{2} = \frac{2 \text{ KHz} + 3 \text{ KHz}}{2} = \underline{\underline{2,5 \text{ KHz}}} \quad f_{m2} = \frac{f_{d2} + f_{s2}}{2} = \frac{4 \text{ KHz} + 5 \text{ KHz}}{2} = \underline{\underline{4,5 \text{ KHz}}}$$

mit $\omega' = 2 * \pi * \frac{f}{f_a}$ ergeben sich folgende normierte Mittenkreisfrequenzen:

$$\omega'_{m1} = 2 * \pi * \frac{2,5 \text{ KHz}}{20 \text{ KHz}} = \underline{\underline{0,785}} \quad \omega'_{m2} = 2 * \pi * \frac{4,5 \text{ KHz}}{20 \text{ KHz}} = \underline{\underline{1,414}}$$

3.2. Fourier-Approximation

Nun wird der Verlauf der Dämpfungskurve bei ω'_m durch eine Fourierreihe approximiert.

Allg. Fourier-Reihe:
$$A(\omega') = \frac{c_0}{2} + \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} * \cos(\mu * \omega')$$

Fourier-Koeffizienten:
$$c_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega') d\omega'$$

$$c_{\mu} = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega') * \cos(\mu * \omega') d\omega'$$

Da für den idealen Tiefpass gilt: $A(\omega')=1$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\omega'_m}^{\omega'_m} A(\omega') d\omega' = \frac{1}{\pi} * 2 * \omega'_m \quad c_0(TP_1) = \underline{\underline{0,5}} \quad c_0(TP_2) = \underline{\underline{0,9}}$$

$$c_{\mu} = \frac{1}{\pi} * \int_{-\omega'_m}^{\omega'_m} \cos(\mu * \omega') d\omega' = \frac{1}{\pi} * 2 * \frac{\sin(\mu * \omega'_m)}{\mu}$$

Was an dieser Stelle noch fehlt, ist die Abschätzung der Ordnung des Filters, die zugleich auch die Anzahl der zu berechnenden Glieder c_{μ} der Fourier-Reihe darstellt.

$$n \geq \frac{a_s - 7,95}{14,36 * \Delta f'} \quad \Delta f'_1 = \frac{f_{d1} - f_{s1}}{f_a} = \underline{\underline{0,05}} \quad \Delta f'_2 = \frac{f_{s2} - f_{d2}}{f_a} = \underline{\underline{0,05}}$$

$$n_{1,2} \geq \underline{\underline{58,56}}$$

Da genau $m = \frac{n}{2}$ Koeffizienten jeweils für $+\mu$ als auch für $-\mu$ berechnet werden müssen, ist es ratsam, die Ordnung n nicht nur ganzzahlig zu wählen, sondern sie sollte auch geradzahlig sein.

$$\underline{\underline{n_{1,2} = 60}} \quad \underline{\underline{m_{1,2} = 30}}$$

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten erfolgt dann von $\mu=-30$ bis $\mu=-1$, und von $\mu=1$ bis $\mu=30$ für beide normierten Tiefpässe mittels MatLab.

3.3. Kaiser-Fensterung

Da es durch die Fourier-Approximation zu Überschwingungen im Dämpfungsverlauf (Gibbsches Phänomen) kommt, lässt sich auf diese Weise nur eine maximale Sperrdämpfung von 21 dB erzielen. Um die Sperrdämpfung dennoch zu erhöhen, werden die Koeffizienten der Fourier-Reihe im Folgenden mittels der Kaiser-Fensterung gewichtet.

Dazu werden die Koeffizienten c_μ beider Tiefpässe mit dem Faktor $\omega_\mu(m)$ multipliziert:

$$\omega_\mu(m) = \frac{J_0\left(\alpha * \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{m} - 1\right)^2}\right)}{J_0(\alpha)}$$

J_0 : mod. Bessel-Funktion 1. Art, 0. Ordnung

α : Vorfaktor, der die Breite des Fensters bestimmt, für Sperrdämpfungen oberhalb der 50 dB gilt:

$$\alpha = 0,1102 * (a_s - 8,7) = \underline{\underline{4,55}}$$

Der Einfachheit halber wurde zur Berechnung aller Koeffizienten die MatLab-Funktion *kaiser()* verwendet.

Zu guter Letzt müssen die gewichteten Koeffizienten des zweiten TP's von denen des Ersten subtrahiert werden, und schon erhält man alle Nullstellen des Bandpasses, aus denen man dann die Übertragungsfunktion erstellt (Polstellen werden im Ursprung des Einheitskreises in der Anzahl der Ordnung $n+1$ aufgefüllt).

3.4. Koeffizientenliste

μ	$c_{\mu}(TP_1)$	$c_{\mu}(TP_2)$	$c_{\mu}(TP_1)$ mit Gewichtung	$c_{\mu}(TP_2)$ mit Gewichtung	$c_{\mu}(BP)$
-30	-0.0212207	-0.0212207	-0.0011603	-0.0011603	0
-29	-0.0155227	-0.0034341	-0.0011623	-0.0002571	-0.0009052
-28	0.0000000	0.0216236	0.0000000	0.0021134	-0.0021134
-27	0.0166725	0.0107044	0.0020549	0.0013193	0.0007356
-26	0.0244854	-0.0198091	0.0037068	-0.0029988	0.0067056
-25	0.0180063	-0.0180063	0.0032785	-0.0032785	0.0065569
-24	-0.0000000	0.0155915	-0.0000000	0.0033553	-0.0033553
-23	-0.0195721	0.0246623	-0.0049051	0.0061807	-0.0110858
-22	-0.0289373	-0.0089421	-0.0083380	-0.0025766	-0.0057614
-21	-0.0214361	-0.0299420	-0.0070215	-0.0098076	0.0027861
-20	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000000
-19	0.0236925	0.0330938	0.0097379	0.0136019	-0.0038640
-18	0.0353678	0.0109292	0.0160731	0.0049669	0.0111063
-17	0.0264799	-0.0333666	0.0132031	-0.0166368	0.0298399
-16	-0.0000000	-0.0233872	-0.0000000	-0.0127017	0.0127017
-15	-0.0300105	0.0300105	-0.0176333	0.0176333	-0.0352666
-14	-0.0454728	0.0367883	-0.0287215	0.0232362	-0.0519577
-13	-0.0346275	-0.0222323	-0.0233686	-0.0150035	-0.0083650
-12	0.0000000	-0.0504551	0.0000000	-0.0361702	0.0361702
-11	0.0409235	0.0090536	0.0309911	0.0068562	0.0241349
-10	0.0636620	0.0636620	0.0506567	0.0506567	0
-9	0.0500176	0.0110655	0.0416028	0.0092039	0.0323989
-8	-0.0000000	-0.0756827	-0.0000000	-0.0654718	0.0654718
-7	-0.0643083	-0.0412885	-0.0575778	-0.0369672	-0.0206106
-6	-0.1061033	0.0858394	-0.0978513	0.0791634	-0.1770147
-5	-0.0900316	0.0900316	-0.0851220	0.0851220	-0.1702440
-4	0.0000000	-0.0935489	0.0000000	-0.0902582	0.0902582
-3	0.1500527	-0.1890775	0.1470653	-0.1853131	0.3323784
-2	0.3183099	0.0983632	0.3154809	0.0974890	0.2179920
-1	0.4501581	0.6287819	0.4491553	0.6273812	-0.1782258
0	0.5000000	0.9000000	0.5000000	0.9000000	-0.4000000
1	0.4501581	0.6287819	0.4491553	0.6273812	-0.1782258
2	0.3183099	0.0983632	0.3154809	0.0974890	0.2179920
3	0.1500527	-0.1890775	0.1470653	-0.1853131	0.3323784
4	0.0000000	-0.0935489	0.0000000	-0.0902582	0.0902582
5	-0.0900316	0.0900316	-0.0851220	0.0851220	-0.1702440
6	-0.1061033	0.0858394	-0.0978513	0.0791634	-0.1770147
7	-0.0643083	-0.0412885	-0.0575778	-0.0369672	-0.0206106
8	-0.0000000	-0.0756827	-0.0000000	-0.0654718	0.0654718
9	0.0500176	0.0110655	0.0416028	0.0092039	0.0323989
10	0.0636620	0.0636620	0.0506567	0.0506567	0
11	0.0409235	0.0090536	0.0309911	0.0068562	0.0241349
12	0.0000000	-0.0504551	0.0000000	-0.0361702	0.0361702
13	-0.0346275	-0.0222323	-0.0233686	-0.0150035	-0.0083650
14	-0.0454728	0.0367883	-0.0287215	0.0232362	-0.0519577
15	-0.0300105	0.0300105	-0.0176333	0.0176333	-0.0352666
16	-0.0000000	-0.0233872	-0.0000000	-0.0127017	0.0127017
17	0.0264799	-0.0333666	0.0132031	-0.0166368	0.0298399
18	0.0353678	0.0109292	0.0160731	0.0049669	0.0111063
19	0.0236925	0.0330938	0.0097379	0.0136019	-0.0038640
20	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000000
21	-0.0214361	-0.0299420	-0.0070215	-0.0098076	0.0027861
22	-0.0289373	-0.0089421	-0.0083380	-0.0025766	-0.0057614
23	-0.0195721	0.0246623	-0.0049051	0.0061807	-0.0110858
24	-0.0000000	0.0155915	-0.0000000	0.0033553	-0.0033553
25	0.0180063	-0.0180063	0.0032785	-0.0032785	0.0065569
26	0.0244854	-0.0198091	0.0037068	-0.0029988	0.0067056
27	0.0166725	0.0107044	0.0020549	0.0013193	0.0007356
28	0.0000000	0.0216236	0.0000000	0.0021134	-0.0021134
29	-0.0155227	-0.0034341	-0.0011623	-0.0002571	-0.0009052
30	-0.0212207	-0.0212207	-0.0011603	-0.0011603	0

3.5. Simulation und Auswertung

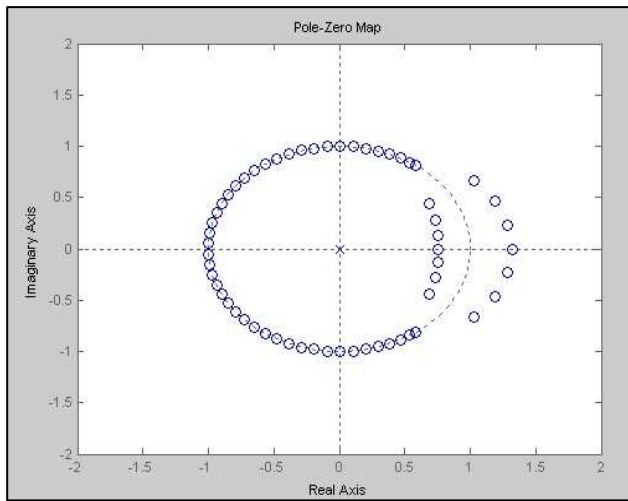


Abb.: *p-n-Plan des ersten gewichteten TP's*

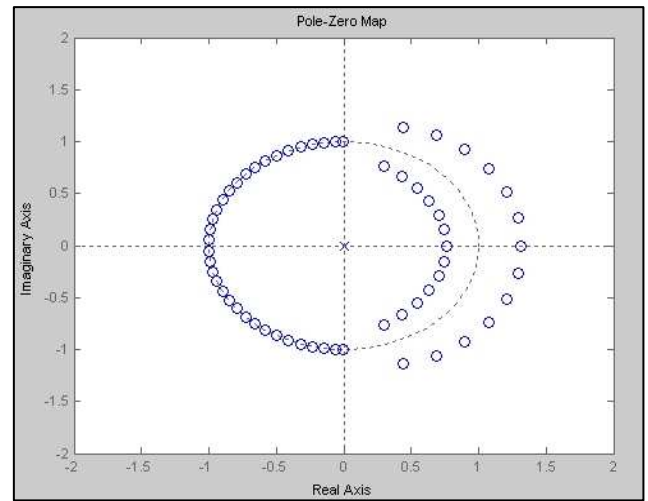


Abb.: *p-n-Plan des zweiten gewichteten TP's*

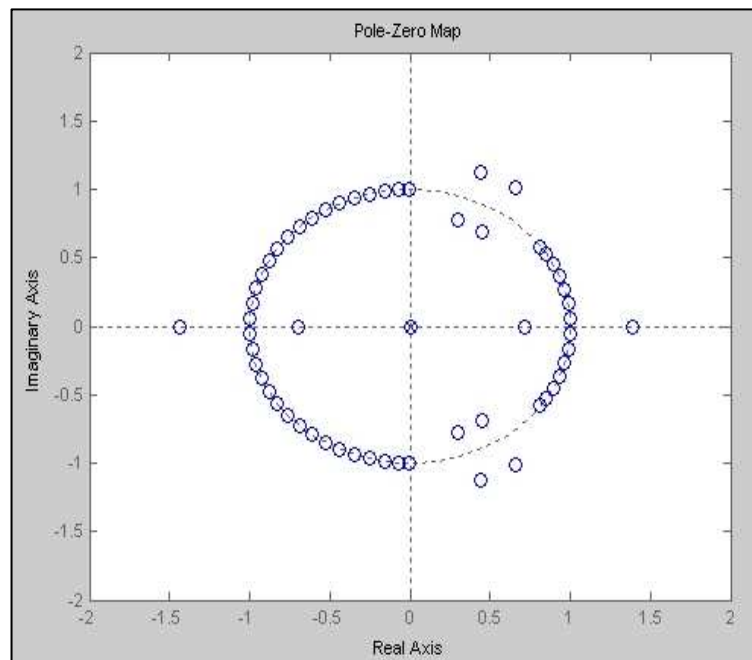


Abb.: *p-n-Plan des FIR-Filters*

Der *p-n-Plan* des Bandpasses sieht sehr charakteristisch aus für einen FIR-Filter. Alle 61 Polstellen liegen im Ursprung des Einheitskreises, damit ist das Stabilitätskriterium erfüllt. Und wäre da nicht die eine, etwas verloren aussehende Nullstelle im Ursprung, ich würde den entworfenen Filter doch glatt als linearphasiges System einstufen (alle Nullstellen liegen auf dem Einheitskreis bzw. paarweise spiegelbildlich zu ihm, bis auf die Eine).

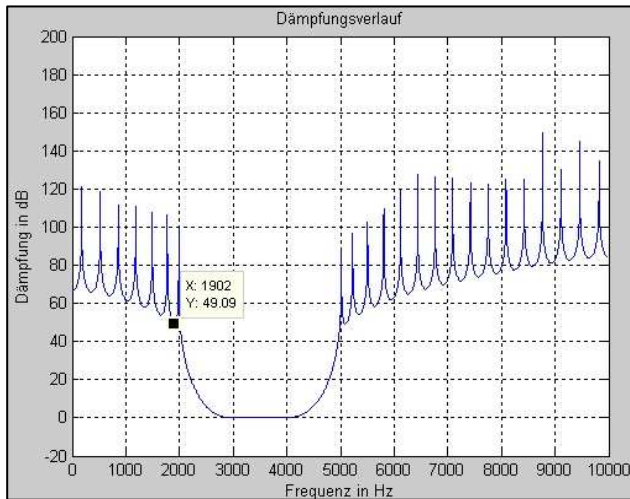


Abb.: Dämpfungsverlauf zwischen 0-10 KHz

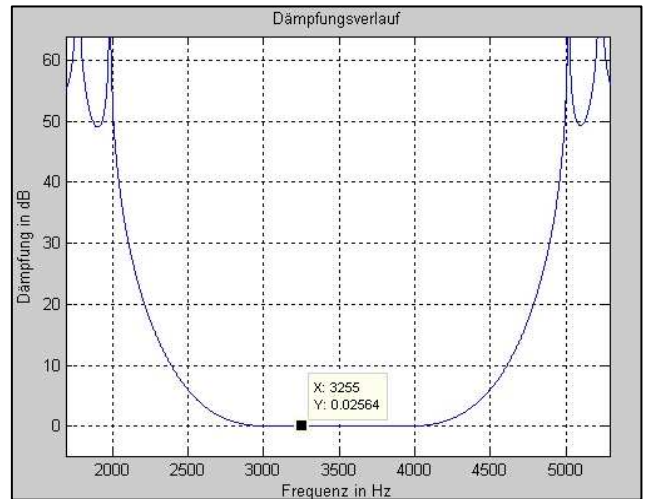


Abb.: Detailansicht Dämpfungsverlauf

Auch der Dämpfungsverlauf hinterlässt für einen Bandpass einen guten Eindruck: die Eckfrequenzen sind klar ersichtlich, die Dämpfung im Durchlassbereich ist minimal (max. Durchlassdämpfung liegt bei 0,026 dB) und von Welligkeit im Durchlassbereich keine Spur mehr (sie ist minimal). Nur eine Winzigkeit stört den sonst so guten Gesamteindruck: die minimale Sperrdämpfung ist mit 49,1 dB an der Stelle der ersten Durchlassnebenkeule zu gering (gefordert war eine minimale Sperrdämpfung von 50 dB).

Was ist also die Ursache für das Versagen beim Filterentwurf ? Und wichtiger, wie bekommt man es wieder geradegebogen ?

Zwei Möglichkeiten, die Abhilfe schaffen:

1. In Serie ein statisches Dämpfungsglied mit 1 dB zum Filter schalten, dann werden alle Bedingungen erfüllt. Das ist sicher einfach und praktikabel, aber nicht sehr elegant.
2. Schuld am Versagen des Filterentwurfs hat die Variable a_s , die mit genau 50 dB zu grenzwertig gewählt wurde. Sie beeinflusst indirekt die Gewichtung der Fourier-Koeffizienten mit dem Kaiserfenster, und direkt den Faktor α . Erhöht man nun den Faktor α oder a_s , so kommt man schnell zu einem funktionierenden FIR-Filter:

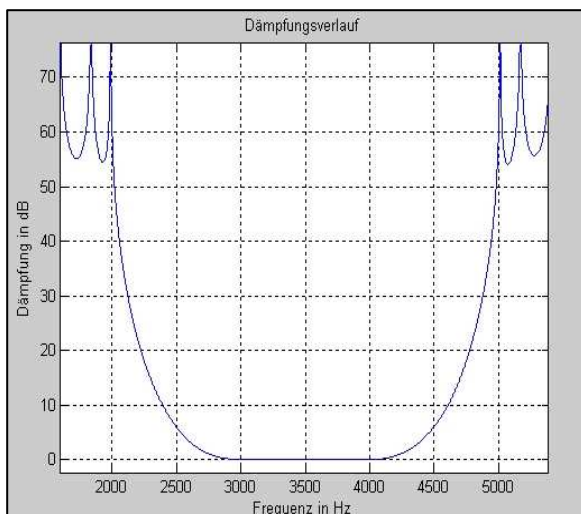
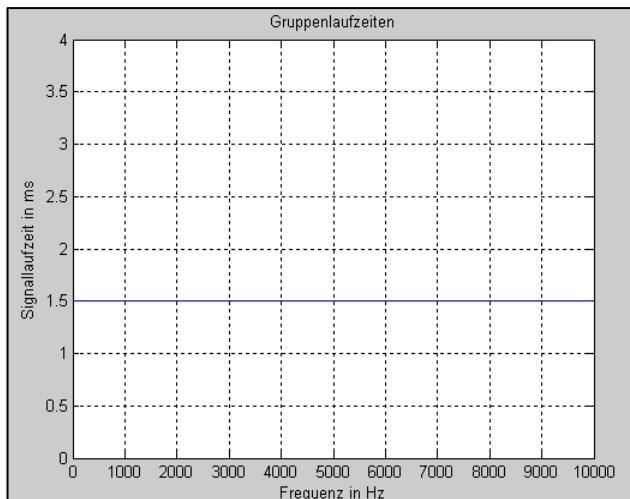


Abb.: Dämpfungsverlauf mit gewählten $a_s=55$ dB

Allerdings wird diese Änderung an den Variablen mit zwei Veränderungen in den Eigenschaften des Filters erkauft:

Der Durchlassbereich erweitert sich geringfügig, Und die Gruppenlaufzeit erhöht sich um 0,2 ms.



Dies ist eine typische Eigenschaft der FIR-Filter: Die Gruppenlaufzeit ist über das gesamte Frequenzspektrum konstant. Bei diesem Filter kommt es nicht zu Verzerrungen des Ausgangssignals.

3.6. MatLab Quellcode

```
format long;
% Die gegebenen Werte:

fs1=2000; %untere Sperrfrequenz
fd1=3000; %untere Durchlassgrenze
fd2=4000; %obere Durchlassgrenze
as=50;    %minimale Sperrdämpfung
ad=1.25;  %max. Durchlassdämpfung

%Die festgelegten Werte

fs2=5000; %obere Sperrfrequenz
fa=20000; %Abtastfrequenz
ta=1/fa;  %Abtastzeit

% Fourierapproximation:

omm1=2*pi*((fs1+fd1)/2)/fa; % normierte Mittenkreisfrequenzen
omm2=2*pi*((fs2+fd2)/2)/fa; %

deltaf1=(fd1-fs1)/fa;
deltaf2=(fs2-fd2)/fa;
n1=ceil((as-7.95)/(14.36*deltaf1)) % Abschätzen der Ordnung
n2=ceil((as-7.95)/(14.36*deltaf2)) % identisch mit n1 bei fs2=5KHz, daher
überflüssig
if (n2>n1) n1=n2; end; %von Interesse ist nur die höhere Ordnung
if (mod(n1,2)>0) n1=n1+1; end; %Vermeidung von ungeraden Zahlen

m1=n1/2;
m2=n2/2; % überflüssig
c01=(2*omm1)/pi; % Fourierkoeffizienten c-Null
c02=(2*omm2)/pi;
cm1=ones(n1,1); % weil ich nur eine Spalte will, und keine n1xn1 Matrix
cm2=ones(n1,1); % unnütz für'n erfahrenen MatLab-User
for i =(1):m1 % Berechnen der Fourierkoeffizienten c-Micro
    cm1(i+m1+1,1)=(2*sin((i)*omm1))/(pi*(i));
    cm1(m1-i+1,1)=(2*sin((i)*omm1))/(pi*(i));
    cm2(i+m1+1,1)=(2*sin((i)*omm2))/(pi*(i));
    cm2(m1-i+1,1)=(2*sin((i)*omm2))/(pi*(i));
end;
```



```

cmi1(m1+1,1)=c01; % c-Null mittig in die Faktorenliste einordnen
cmi2(m1+1,1)=c02;

alpha=0.1102*(as-8.7); % Faktor für die Kaiserfensterung
cmi11 = cmi1.*kaiser(n1+1, alpha); % Gewichtung der c-Micros mittels
cmi22 = cmi2.*kaiser(n1+1, alpha); % Kaiserfenster
cmi=cmi11-cmi22; % TP-zu-BP-Transformation

tp1 = tf(cmi11', [1, zeros(1,n1+1)], ta); %Übertragungsfunktionen der
gewichteten Tiefpässe
tp2 = tf(cmi22', [1, zeros(1,n1+1)], ta);
bp = tf(cmi', [1, zeros(1,n1+1)], ta); % Bandpassübertragungsfunktion
figure(1), pzmap(tp1);
    axis([-2, 2, -2, 2]);
figure(2), pzmap(tp2);
    axis([-2, 2, -2, 2]);
figure(3), pzmap(bp);
    axis([-2, 2, -2, 2]);

% Ausgabe des Dämpfungsverlaufes des FIR-Filters

[H,F] = freqz(cmi,1, 10000, fa);
figure(4), plot(F, 20*log10(H./max(H))*(-1)), grid;
axis([0, 10000, -20, 200]);
ylabel('Dämpfung in dB'), xlabel('Frequenz in Hz'), title('Dämpfungsverlauf');

% Ausgabe des Gruppenlaufzeit des FIR-Filters

[H,F] = grpdelay(cmi,1, 10000, fa);
figure(5), plot(F, H*ta*1000), grid;
axis([0, 10000, 0, 4]);
ylabel('Signallaufzeit in ms'), xlabel('Frequenz in Hz'),
title('Gruppenlaufzeiten');

```

4. Aufgabe 2:

Entwurf eines HF-Bandfilters

Es ist ein vierkreisiges HF-Bandfilter mit kapazitiver Kopplung zu entwerfen, das folgende Bedingungen erfüllt:

Mittenfrequenz: $f_m=450$ KHz
Bandbreite: $B=8$ KHz
max. Durchlassdämpfung: $a_d=1,25$ dB

4.1. p-n-Daten des normierten Tiefpasses

Zunächst erfolgt eine verschärfte Festlegung für die max. zulässige Durchlassdämpfung, da ansonsten die Bedingungen nicht erfüllt werden:

$$\underline{a_d=1,2 \text{ dB}}$$

Nun wird die Größe der elliptischen Halbachsen bestimmt, auf denen die vier Polstellen des normierten Tiefpasses liegen:

$$\text{Parameter } \delta: \quad \delta = \sqrt{10^{0,1 \cdot a_d} - 1} = \underline{\underline{0,5641}}$$

$$u_{HA} = \sinh\left(\frac{1}{n} * \arcsin h\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) = \underline{\underline{0,3405}} \quad \text{mit Ordnung } n=4$$

$$\Omega_{HA} = \cosh\left(\frac{1}{n} * \arcsin h\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) = \underline{\underline{1,0564}}$$

Die Polstellen ergeben sich wie folgt:

$$p_i = -u_{HA} * \sin\left(\pi * \frac{2 * i - 1}{2 * n}\right) + j\Omega_{HA} * \cos\left(\pi * \frac{2 * i - 1}{2 * n}\right)$$

$$p_{1,2} = \underline{\underline{-0,1303 \pm 0,9760j}}$$

$$p_{3,4} = \underline{\underline{-0,3146 \pm 0,4043j}}$$

4.2. Verlusttransformation

Da der Filter aus realen Bauelementen besteht, die verlustbehaftet sind, ist eine Verlusttransformation durchzuführen. Dabei wird die imaginäre Achse des p-n-Planes um einen Betrag δ_0 nach links verschoben.

δ_0 ist wie folgt zu wählen: $\delta_0 < \min\{\text{Re}\{p_i\}\}$

$$\underline{\underline{\delta_0 = 0,08}}$$

Damit entsteht eine neue p-Ebene: p'

Auf ihr werden die Polstellen um den Betrag δ_0 nach rechts verschoben:

$$p'_{1,2} = \underline{\underline{-0.0503 \pm 0.9760j}}$$

$$p'_{3,4} = \underline{\underline{-0.2346 \pm 0.4043j}}$$

δ_0 beeinflusst dabei maßgeblich die Güte Q der Schwingkreise:

$$Q_0 = \frac{f_m}{B * \delta_0} = \underline{\underline{703.1250}}$$

Betriebsübertragungsfunktion:

$$H_B(p') = \frac{K}{N(p')} \quad \text{Für die Wahl von K gilt: } |H_B(p')|_{p'=j\Omega'} = |H_B(\Omega')| \leq 1$$

und wird mit K=0,07 festgelegt.

$$H_B(p') = \frac{0,07}{(p'^2 + 0.4692p' + 0.2185)(p'^2 + 0.1006p' + 0.9551)}$$

Echoübertragungsfunktion:

$$H_E(p') * H_E(-p') = 1 - H_B(p') * H_B(-p')$$

$H_E(p')$ erhält man dann durch Eliminieren aller Pol- und Nullstellen der rechten Halbebene.

$$H_E(p') = \frac{p^4 + 0.4867p^3 + 1.177p^2 + 0.4174p + 0.1966}{p^4 + 0.5698p^3 + 1.221p^2 + 0.4701p + 0.2086}$$

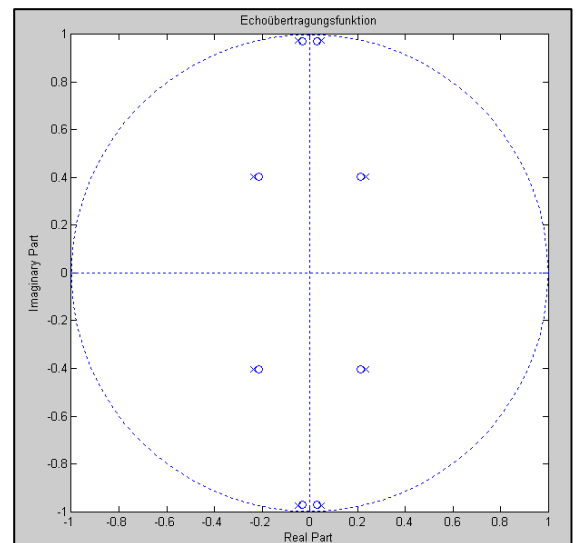


Abb.: p-n-Plan von $H_E(p') * H_E(-p')$

4.3. Kettenbruchzerlegung

Für die Bestimmung der Eingangsimpedanz gilt:

$$\frac{Z_e(p')}{r_1} = \frac{1 + H_E(p')}{1 - H_E(p')}$$

$$\frac{Z_e(p')}{r_1} = \frac{2p^8 + 2.196p^7 + 5.441p^6 + 4.484p^5 + 4.752p^4 + 2.662p^3 + 1.412p^2 + 0.3757p + 0.08455}{0.08316p^7 + 0.09131p^6 + 0.1793p^5 + 0.1349p^4 + 0.1093p^3 + 0.04871p^2 + 0.01669p + 0.002523}$$

Zur Gewinnung der Koppelfaktoren, wird $Z_e(p')$ nun als Kettenbruch nach folgendem Muster zerlegt:

$$\frac{Z_e(p')}{r_1} = K_1 * p' + \frac{1}{K_2 * p' + \frac{1}{K_3 * p' + \frac{1}{K_4 * p' + K_5}}}$$

$$K_1 = 24.0514$$

$$K_2 = 0.0736$$

$$K_3 = 49.3387$$

$$K_4 = 0.0565$$

$$K_5 = 0.0298$$

Es entsteht ein Gleichungssystem, das durch rekursives Lösen zur Bestimmung der Variablen führt:

1. $\frac{R_1}{\delta_1} * (\delta_1 - \delta_0) = r_1$
2. $\frac{R_1}{\delta_1} = K_1 * r_1$
3. $\frac{\delta_1}{R_1 * x_{1,2}^2} = \frac{K_2}{r_1}$
4. $\frac{R_1 * x_{1,2}^2}{\delta_1 * x_{2,3}^2} = K_3 * r_1$
5. $\frac{\delta_1 * x_{2,3}^2}{R_1 * x_{1,2}^2 * x_{3,4}^2} = \frac{K_4}{r_1}$
6. $\frac{\delta_1 * x_{2,3}^2}{R_1 * x_{1,2}^2 * x_{3,4}^2} * (\delta_4 - \delta_0) = \frac{K_5}{r_1}$

Mit $K_1 = \frac{R_1}{\delta_1 * r_1}$ erhält man nach Lösen des Gleichungssystems alle benötigten Kenngrößen:

$$\delta_1 = 0.121577578225543$$

$$\delta_4 = 0.608254131291785$$

$$x_{1,2} = 0.751481545875169$$

$$x_{2,3} = 0.524680278290388$$

$$x_{3,4} = 0.598968437951905$$

4.4. Berechnung der Baugrößen

Festlegung für die Induktivität der Schwingkreise: L=0,1 mH

$$\text{relative Bandbreite: } \Delta = \frac{B}{f_m} = \underline{\underline{0.017}}$$

$$\text{Kreismittenfrequenz: } \omega_m = 2 * \pi * f_m = 2827433.388230814 \frac{1}{s}$$

aus $\omega_m^2 = \frac{1}{L * C}$ ergibt sich $C = \frac{1}{L * \omega_m^2} = \underline{\underline{1.250878810399232\text{nF}}}$

Damit können nun die Größen für die drei Koppelkondensatoren bestimmt werden:

$$C_{K,K+1} = C * \frac{\Delta * x_{K,K+1}}{1 - (\Delta * x_{K,K+1})^2}$$

$$C_{1,2} = \underline{\underline{16,71431371160736\text{pF}}}$$

$$C_{2,3} = \underline{\underline{11,66877421727692\text{pF}}}$$

$$C_{3,4} = \underline{\underline{13,32127805167478\text{pF}}}$$

Für die Kondensatoren der einzelnen Schwingkreise ergibt sich die Dimensionierung wie folgt:

$$C_1 = C - C_{1,2} = \underline{\underline{1.234164496687625\text{nF}}}$$

$$C_2 = C - C_{1,2} - C_{2,3} = \underline{\underline{1.222495722470348\text{nF}}}$$

$$C_3 = C - C_{2,3} - C_{3,4} = \underline{\underline{1.225888758130280\text{nF}}}$$

$$C_4 = C - C_{3,4} = \underline{\underline{1.237557532347557\text{nF}}}$$

Da alle vier Schwingkreise mit der gleichen Güte Q_0 arbeiten sollen, muss nun noch ein Widerstand parallel zu Spule und Kondensator zu jedem Schwingkreis hinzugefügt werden:

$$R_p = \omega_m * L * Q_0 = \underline{\underline{198,8039101099791\text{K}\Omega}}$$

Bleibt noch die Berechnung der beiden Widerstände, welche die größere Dämpfung des ersten und vierten Schwingkreises durch vor-/nachgeschalteten Transistorstufen kompensieren:

$$R_i = \frac{\omega_m * L}{\Delta * (\delta_1 - \delta_0)} = \underline{\underline{382,521385\text{K}\Omega}}$$

$$R_a = \frac{\omega_m * L}{\Delta * (\delta_4 - \delta_0)} = \underline{\underline{30,1073136\text{K}\Omega}}$$

Da kleine Änderungen an diesen beiden Widerständen nur geringen Einfluss auf den Dämpfungsverlauf haben, werden sie aus dem Bauch heraus großzügig gerundet:

$$\underline{\underline{R_i=400\text{ K}\Omega}} \quad \underline{\underline{R_a=30\text{ K}\Omega}}$$

4.5. Simulation und Auswertung

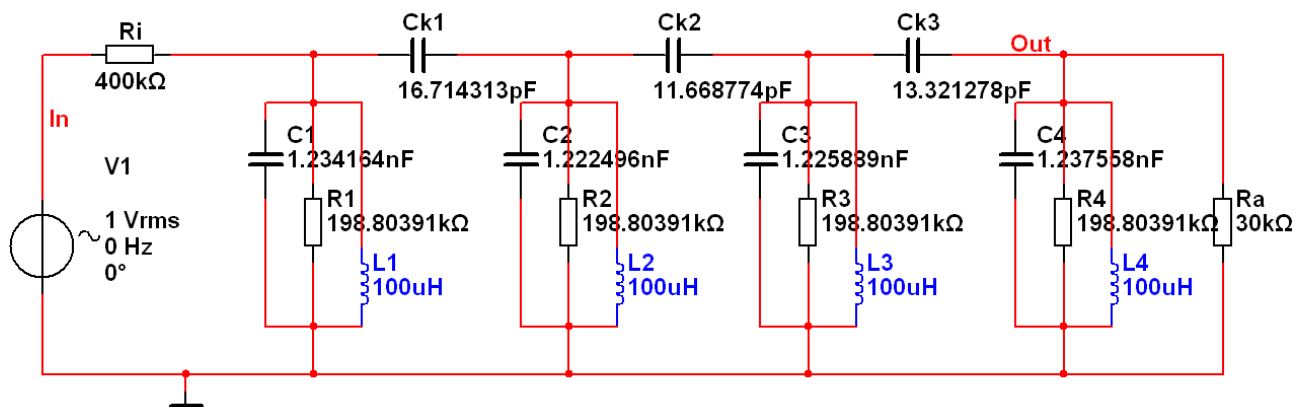


Abb.: Schaltplan des Bandfilters mit MultiSim erstellt, nach DIN

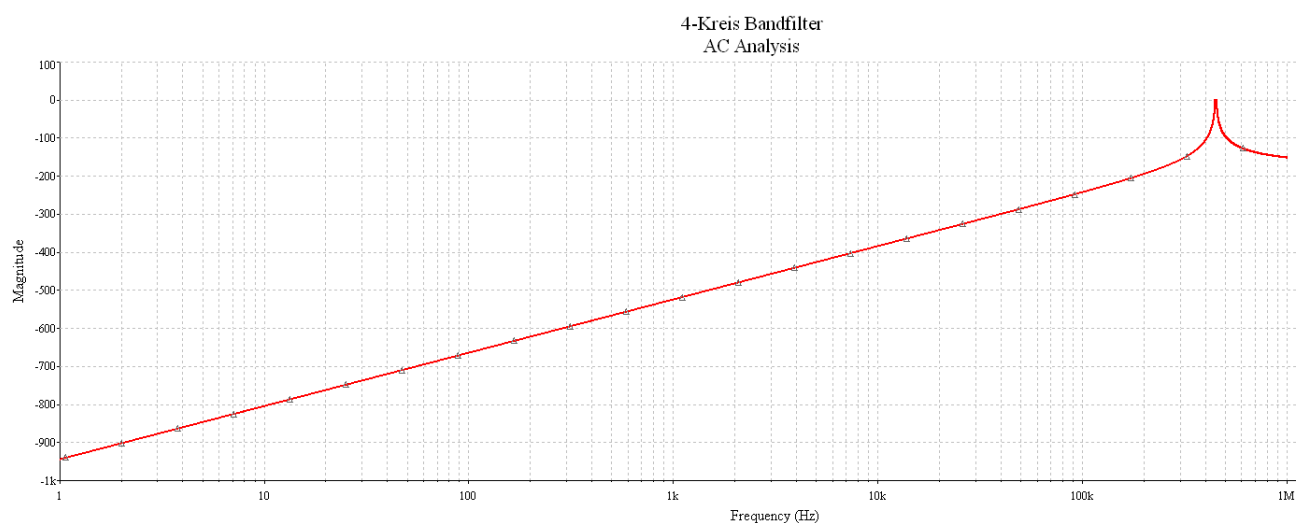


Abb.: Amplitudengang des Filters über die Frequenz von 1 Hz – 1 MHz

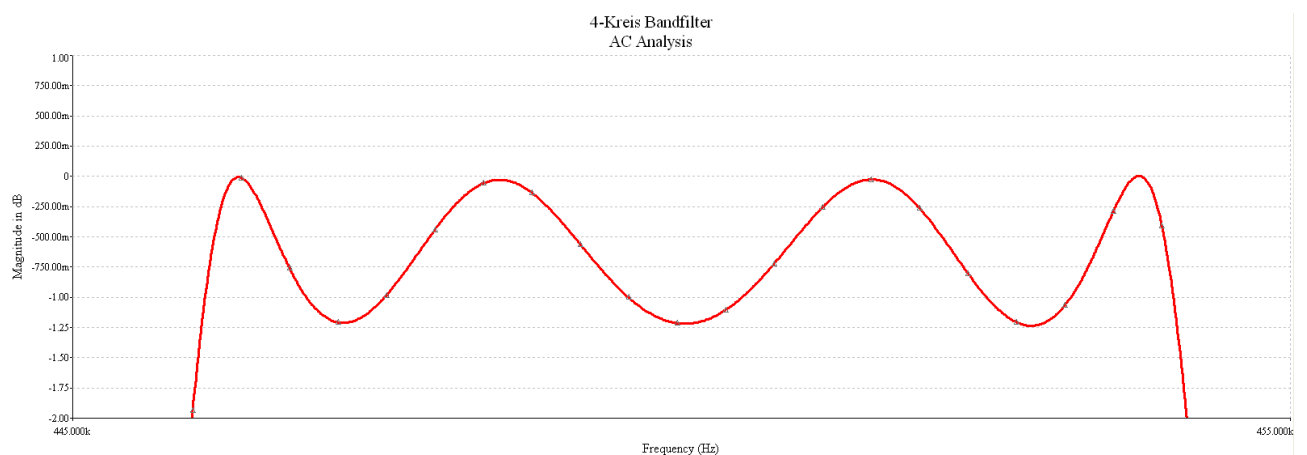


Abb.: Detailansicht des Amplitudengangs im Bereich von 445 KHz-455 KHz

Wie die beiden obigen Abbildungen zeigen, wurden die Bedingungen für den zu entwerfenden Bandfilter erfüllt. Die maximale Durchlassdämpfung liegt bei etwas weniger als 1,25 dB, der Durchlassbereich, und somit die Bandbreite, beträgt 8 KHz.

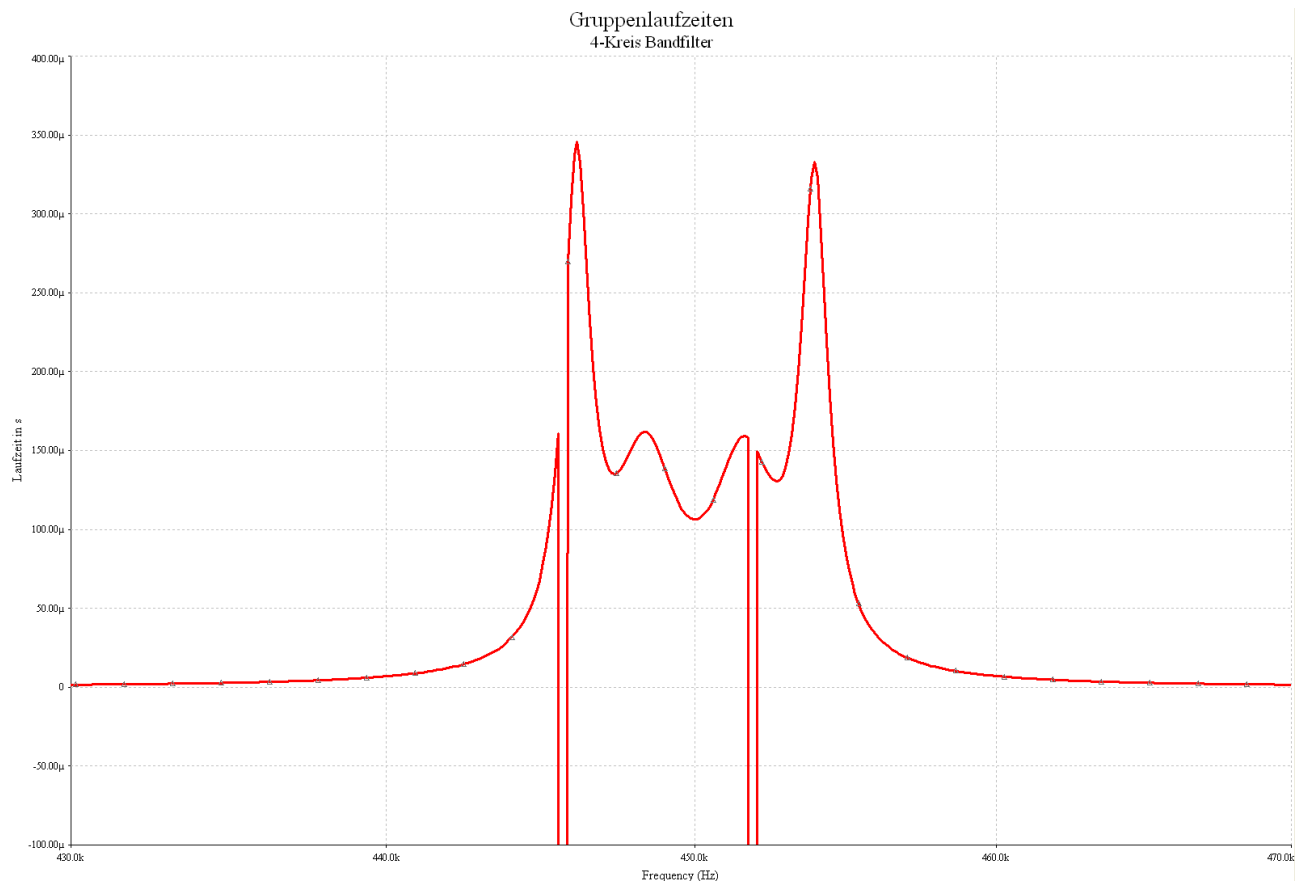


Abb.: Gruppenlaufzeiten im Bereich 430 KHz-470 KHz

Anhand der Abbildung lässt sich wiederum gut erkennen, dass es durch den nicht-linearen Verlauf der Gruppenlaufzeit zu Signalverzerrungen kommt. Zwar beträgt die Verzögerung im Vergleich zu Aufgabe 1a/1b nur noch ein Zehntel, doch tritt sie bei einer Frequenz auf, die der Hundertfachen aus besagter Aufgabe entspricht.

4.6. MatLab Quellcode

```
format long;
% Die gegebenen Werte:

fm=450000;
B=8000;
ad=1.2;
n=4;
Vtrans=6; %Verlusttransformationsverschiebungsbetrag
kb=0.07;
L=0.0001; % festgelegte Induktivität der Schwingkreise

delta=sqrt(10^(0.1*ad)-1);
% Bestimmen der Pol und Nullstellen des normierten Tiefpasses
uha=sinh((1/n)*asinh(1/delta));
omha=cosh((1/n)*asinh(1/delta));
for k =(1):n
    uk(k)=uha*(-1)*sin(pi*(2*k-1)/(2*n));
    omk(k)=j*omha*cos(pi*(2*k-1)/(2*n));
end;
pk=sort(uk'+omk');

% Verlusttransformation durch Bestimmung eines geeigneten delta0's
delta0=(ceil(min(abs(uk))*100)-Vtrans)/100
% Verschieben der Pol-und Nullstellen
pk=pk+delta0;
uk=uk+delta0;
q0=fm/(B*delta0) % Güte der zukünftigen Schwingkreise
hbp=zpk([],pk,kb); % Betriebsübertragungsfunktion p+
hbm=zpk([],pk*(-1),kb); % und einmal für p-
hepm=1-hbp*hbm; % Echoübertragungsfunktion für beide Halbebenen
figure(1), zplane(zero(hepm), pole(hepm))
    axis([-1, 1, -1, 1]);
    title('Echoübertragungsfunktion');
zhpm=zero(hepm);
phpm=pole(hepm);
n1=1;
n2=1;
% "Beschneiden" der Echoübertragungsfunktion
for k=1:length(zhpm)
    if (real(zhpm(k))<=0)
        zhpm(n1)=zhpm(k);
        n1=n1+1;
    end
    if (real(phpm(k))<=0)
        phpm(n2)=phpm(k);
        n2=n2+1;
    end
end
hep=zpk(zhpm,phpm,kb);
[b, a]=zp2tf(zhpm',phpm',1);
he=tf(b,a);

% Übertragungsfunktion zur Bestimmung der Eingangsimpedanz
ze=(1+he)/(1-he);
figure(2), zplane(zero(ze), pole(ze))
    axis([-1, 1, -1, 1]);
    title('Ze(p)');
```



```

%Kettenbruchzerlegung mittels Polynomdivision
%hier auf die klassische Art
[zaehler, nenner] = tfdata(ze, 'v');
for k=1:n*2
    kette(k)=zaehler(k)/nenner(k+1);
    tmp=nenner*kette(k);
    zaehler2=nenner;
    for l=k:length(zaehler)-1
        zaehler(l)=zaehler(l)-tmp(l+1);
    end;
    tmp=nenner;
    nenner=zaehler;
    zaehler=tmp;
end;
tmp=kette;
kette=[];
for k=1:n kette(k)=tmp(k); end;
%Soweit so gut ! Aber wo bekomme ich nur das 5. Glied der Kette her ?
%Hab ja noch weitere 5 zur Auswahl, von denen allerdings
%keines so richtig passt ! Es ist maßgebend für Ra !
%Hab aber noch den Wert von 'nem Algo, der aber leider nicht
%der Meine war !
%kette(k+1)=tmp(n*2);
kette(5)=0.029843314468704;

%Berechnen der Parameter aus dem Gleichungssystem

delta1=1/kette(1)+delta0;
x12=1/sqrt(kette(1)*kette(2));
x23=1/sqrt(kette(2)*kette(3));
x34=1/sqrt(kette(3)*kette(4));
delta4=kette(5)/kette(4)+delta0;

%Berechnen der Bauelemente

dreieck = B/fm;
omm = 2*pi*fm;
c=1/(L*omm^2);
c12=c*((dreieck*x12)/(1-(dreieck*x12)^2))
c23=c*((dreieck*x23)/(1-(dreieck*x23)^2))
c34=c*((dreieck*x34)/(1-(dreieck*x34)^2))
c1=c-c12
c2=c-c12-c23
c3=c-c23-c34
c4=c-c34
ri = omm*L/(dreieck*(delta1-delta0))
ra = omm*L/(dreieck*(delta4-delta0))
rp= omm*L*q0

```

Quellenverzeichnis

- [1] Prof. Dr.-Ing. habil. Rainer Rockmann, Dr.-Ing. Thomas Buch:
Analoge und Digitale Filter, Vorlesungsskript WS 2008/09, Universität Rostock
- [2] Rudolf Saal: Handbuch zum Filterentwurf, 2. Auflage, Hüthig, 1988
- [3] Online Quelle: National Instruments, <http://forums.ni.com>